PROF. AMADOR MARTIN-PIZARRO
DR. DANIEL PALACIN
ALBERT-LUDWIGS-UNIVERSITÄT FREIBURG
WINTERSEMESTER 2018/2019

Bewertete Körper
Blatt 9
Abgabe: 14.01.2019

Aufgabe 1 (14 Punkte)**.**
Sei (K, ν) ein bewerteter Körper. Eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ aus K heißt *pseudo-konvergent*, falls $\nu(a_n - a_m) < \nu(a_{m+1} - a_m)$ für $n < m$ aus $\mathbb{N}$.

(a) Zeige, dass
$$\nu(a_n - a_m) < \nu(a_k - a_m)$$
für $n < m < k$.

(b) Zeige, dass jede pseudo-konvergente Folge Cauchy ist, wenn $\nu(K^*)$ Rang 1 hat.

(c) Falls $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ pseudo-konvergent ist, zeige, dass entweder $\nu(a_n) < \nu(a_m)$ für $n < m$ oder es ein n_0 aus $\mathbb{N}$ so gibt, dass $\nu(a_n) = \nu(a_m)$ für $n, m \geq n_0$.

(d) Ein Element x aus K ist ein *Pseudo-Limes* der pseudo-konvergenten Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, wenn $\nu(x - a_n) = \nu(a_n - a_{n+1})$ für jedes n aus $\mathbb{N}$.

Falls $\nu(a_n) < \nu(a_m)$ für $n < m$, zeige, dass 0 ein Pseudo-Limes ist.

(e) Falls (K, ν) Rang 1 hat, dann ist der Pseudo-Limes der pseudo-konvergenten Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eindeutig bestimmt, wenn $\nu(a_n) < \nu(a_m)$ für $n < m$.

(f) Falls 0 kein Pseudo-Limes ist und x ein Pseudo-Limes ist, zeige, dass $\nu(x) = \nu(a_n)$ für n aus $\mathbb{N}$ groß genug.

(g) Betrachte die Gauß Erweiterung w von $(\mathbb{Q}, \nu_p)$ auf $\mathbb{Q}(T)$ mit $w(T) = (0, 1)$ in $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ mit der antilexikographischen Ordnung. Beschreibe alle Pseudo-Limes der Folge $(p^n + T)_{n\in\mathbb{N}}$.

Aufgabe 2 (6 Punkte)**.**
Eine $(K, \nu) \subset (L, \nu)$ Erweiterung bewerteter Körper ist *unmittelbar*, wenn $\nu(L^*) = \nu(K^*)$ und $L_\nu = K_\nu$.

(a) Falls $(K, \nu) \subset (L, \nu)$ unmittelbar ist, zeige, dass für jedes a in L es ein x aus K derart gibt, dass $\nu(a - x) > \nu(a)$.

HINWEIS: $x = bc$ mit b aus K und $\nu(c) = 0$.

(b) Sei a ein Element aus L, mit $(K, \nu) \subset (L, \nu)$ unmittelbar. Zeige, dass die Menge
$$X(a) = \{\nu(a - x) : x \in K\} \subset \Gamma \cup \{\infty\}$$
genau dann ein maximales Element besitz, wenn a in K liegt.

(c) Mit Hilfe des Teiles (b), beschreibe alle unmittelbaren Erweiterungen von $\mathbb{Q}_p$.

HINWEIS: $\mathbb{Q}_p$ ist eine unmittelbare Erweiterung von $\mathbb{Q}$.

ABGABE DER ÜBUNGSBLÄTTER IN DEN BRIEFKASTEN 3.29 IM UG DER ERNST-ZERMELO-STRASSE 1. DIE ÜBUNGSBLÄTTER MÜSSEN BIS 10 UHR AM JEWEILS ANGEGEBENEN ABGABEDATUM EINGEWORFEN WERDEN.